Universidad Nacional de Ingeniería **17-12-05**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2005-2**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO DE LA SEGUNDA PRÁCTICA DE CALCULO NUMERICO
PARTE A : 5 PUNTOS (30 MINUTOS)

Apellidos y Nombres	Firma	Sección	Nota

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO.

Problema 1

Marque la alternativa que considere correcta:

1. Si la matriz A es triangular superior, entonces:

   a) $\rho(T_G) = [\rho(T_J)]^2$ $\boxed{\text{b) } \rho(T_G) = [\rho(T_J)]}$ c) $\rho(T_G) < [\rho(T_J)] < 1$
   d) $1 < \rho(T_J) < [\rho(T_G)]$ $\boxed{\text{e) } \rho(T_G) = [\rho(T_J)] = 0}$

2. Dado el radio espectral $\rho(A) = \max(|\lambda|)$, el radio espectral de Gauss-Seidel será
   a) rho = max(abs(eig(inv(D)*(L+U))))
   b) rho = max(abs(eig(inv(D-L)*(L))))
   $\boxed{\text{c) rho = max(abs(eig(inv(D-L)*(U))))}}$
   d) rho = max(abs(eig(inv(D-L)*(L-U))))
   e) Ninguna de las anteriores

3. Para que valores de *a*, el siguiente sistema converge, al usar el método de Jacobi

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ a-1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   a) $a < 1$ $a > 2$ b) $1 < a < 2$ c) $0 < a < 1$ d) $a < 2$ $\boxed{\text{e. N.A.}}$

4. Sea: B=[1/2 1; 1 1/2]; A=[B zeros(2,2); zeros(2,2) B], ¿cuál de las siguientes alternativas es el espectro de A?

   a)$[1.5\ 1.5\ \ 0.5\ \ -0.5]^t$ b) $[1.5\ 1.5\ \ 1\ 1]^t$ c) $[1.5\ 1.5\ \ 0.5\ \ 0.5]^t$ $\boxed{\text{d) } [-0.5\ -0.5\ \ 1.5\ \ 1.5]^t}$
   e) N.A.

5. ¿Cuál de los siguientes es un vector propio de B, en la pregunta anterior?

   a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{b)}}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ c)$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ d)$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e) N.A.

6. Si A=$\begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$cuál de las siguientes afirmaciones es falsa

a) Sus vectores propios son linealmente independientes.

b) La multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad aritmética

c) Su único vector propio es nulo

d) Tiene dos valores propios iguales

e) N.A.

7. Si el espectro de A = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.¿ Encuentre la Matriz de Vectores propios Q y analice si es posible ponerlo a su forma diagonal?. Realice $Q^{-1}AQ$.

Solución

A= $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, su único valor propio es 4 de m.a.= 2 y m.g. = 1 por lo tanto no es posible la diagonalización

Hallando los vectores propios

(A-4I)x=0 ➔ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ➔ 2*b*=0 => *b*=0 , *a*=*t* (parámetro) $x=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vector propio generalizado

(A-4I)x_2=x_1 ➔ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ➔ 2*b*=1 => *b*=1/2 , *a*=*t* (parámetro) $x_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Q=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ ➔ **Q^{-1}*A*Q=**$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ **diagonal en bloques.**

8. Sea la ecuación $x^2-4\,sen(x)=0$, se ha establecido que existe una raíz en [1,3], Cuantas iteraciones del método de bisección serán necesarios como mínimo, para alcanzar una precisión de 10 c.d.e.?

a) 34 b) 35 $\boxed{\text{c) 36}}$ d) 38 e) N.A.

9. Sea la ecuación $x^2-x-2=0$, la cual tiene una raíz cercana a 1.5, seleccione cual o cuales de las siguientes formas de iteración de punto fijo son divergentes:

$\boxed{\text{a) } g(x)=x^2-2}$ b) $g(x)=\sqrt{x+2}$ c) $g(x)=1+2/x$ d) $g(x)=\dfrac{x^2+2}{2x-1}$ e) N.A.

10. Sea la ecuación $f(x)=x-e^{-x}=0$, cual será el error de sucesión $\varepsilon_3=|x_3-x_2|$, al aplicar la iteración de punto fijo, a partir de $x_0=0.5$

a) 0.1065 $\boxed{\text{b) 0.0345}}$ c) 0.0613 d) 0.0241 e) N.A.

Los Profesores

Universidad Nacional de Ingeniería **17-12-05**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2005-2**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO DE LA SEGUNDA PRÁCTICA DE CALCULO NUMERICO
PARTE B : 15 PUNTOS (80 MINUTOS)

Problema 1

Se considera la matriz tridiagonal de 3×3 del tipo siguiente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Se pide

a) Estudiar si los dos métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para A convergen o divergen simultáneamente.
b) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre los elementos de la matriz A para que ambos converjan.
c) En el caso de que ambos métodos converjan ¿ Cuál lo hace más rápido?. Justifique su respuesta.
d) Suponiendo que $a_{12} = a_{23} = a_{21} = a_{32} = 0.5$, que el término independiente del sistema lineal ***Ax = b*** es ***b*** = $[1.5 \quad 2.0 \quad 1.5]^t$, comprobar que se verifica el apartado c) hallando el residual ***r*** $(r = b - A\bar{x})$ de la primera iteración para ambos métodos.

Solución
(a)
Matriz de iteración de Jacobi T_J:
Los autovalores de T_J son: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\lambda_3 = \sqrt{a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32}}$, luego su radio espectral es:

$$\rho(T_J) = \left|\sqrt{a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32}}\right|$$

Matriz de iteración de Gauss-Seidel T_{G-S}:
Los autovalores de T_{G-S} son: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32}$, luego su radio espectral es:

$$\rho(T_{G-S}) = \left|a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32}\right|$$

Lo que quiere decir que:

$$\rho(T_J) = \sqrt{\rho(T_{G-S})}$$

L a condición necesaria y suficiente para la convergencia es que el radio espectral de la matriz de iteración sea menor que la unidad. Dada la relación entre ellos, es claro que las dos serán mayor es o menores que la unidad simultáneamente y por tanto convergerán o divergerán simultáneamente.

(b)
La condición necesaria y suficiente es que:

$$\left|a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32}\right| < 1$$

(c)
Caso de que haya convergencia, siendo los dos radios espectrales menores que la unidad, tendremos que $\rho(T_J) \geq \rho(T_{G-S})$ y por tanto el método de Jacobi convergerá más lentamente.

(d)
Si que $a_{12}=a_{21}=a_{32}=a_{23}=0.5$, tendremos que:
$\rho(T_J)=0.7071$, $\rho(T_{G\text{-}S})=0.5$

Para el caso de Jacobi
$x1=[0.5\ \ 0.5\ \ 0.5]^t$
$r1 = b-Ax1=[-0.75\ \ -1.0\ \ -0.75]^t$ $\|r1\|_\infty = 1.0$

Para el caso de Gauss-Seidel
$x1=[0.5\ \ 1.0\ \ 1.0]^t$
$r1 = b-Ax1=[0.5\ \ -0.25\ \ 0.00]^t$ $\|r1\|_\infty = 0.5$

Vemos que el residuo de G-S es menor que el de Jacobi al final de la primer a iteración, como era de esperar dada la diferencia en velocidad de convergencia.

Problema 2

Sea $A=\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

a) Muestre la localización de los círculos de Gershgorin, ¿Que concluye?.
b) Use el método de la potencia con $x^{(0)}=[1\ \ 0]^t$, realice 03 iteraciones y muestre sus resultados en la tercera iteración .
c) Encuentre un valor de q adecuado cercano al menor valor propio en valor absoluto, use el método de la potencia inversa iterada con el mismo valor de $x^{(0)}$ en a), realice 03 iteraciones y muestre a que valor propio y vector propio converge.
d) ¿Cual es el error porcentual cometido?

Solución
a)
$$A=\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$C=|Z-0.5|\leq 1$
Los valores propios están dentro del círculo mostrado en la figura.